Äquivalenz eindeutiger NEAs

Helge Reelfs

RWTH Aachen

06. Februar 2012

Inhalt

Äquivalenzproblem

- Äquivalenz- & Inklusionsproblem zweier NEAs
  $\rightarrow$ PSPACE-schwer
- Erinnerung: P $\subseteq$ NP $\subseteq$ PSPACE
  $\rightarrow$ Vermutung: P $\neq$ NP $\neq$ PSPACE

Wir werden dieses Problem für eine bestimmte Klasse von ϵ-NEAs trotzdem effizient lösen!

Theorem

Das Inklusionsproblem für eindeutige ϵ-NEAs ist in P.

NEA

Nichtdeterministischer Endlicher Automat

$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, q_o, F)$

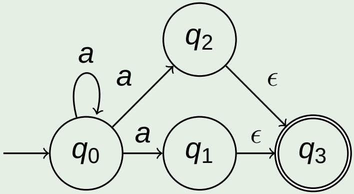
- Endliche Zustandsmenge Q
- Eingabealphabet Σ
- Transitionsfunktion $\Delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \to 2^Q$
- Startzustand q_0
- Endzustände $F \subseteq Q$

Lauf

Lauf von NEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$ auf $w = a_0 \cdots a_{n-1} \in \Sigma^*$:
$\pi = (p_0, a_0, p_1, \cdots, a_{n-1}, p_n)$ mit

- $p_i \in Q$ für alle $0 \leq i \leq n$,
- $a_i \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$ für alle $0 \leq i \leq n-1$,
- $p_{i+1} \in \Delta(p_i, a_i)$ für alle $0 \leq i \leq n-1$.

Beispielautomat



Eindeutigkeit

Grad der Uneindeutigkeit eines Wortes

$$\text{da}(w) = |\{\pi \in \text{akzeptierende Läufe von } \mathcal{A} \text{ auf } w\}|$$

Grad der Uneindeutigkeit eines Automaten

$$\text{da}(\mathcal{A}) = \sup \left(\bigcup_{w \in \Sigma^*} \text{da}(w) \right)$$

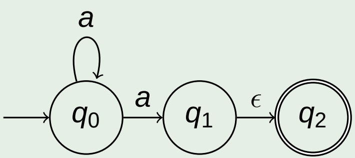
Eindeutigkeitskriterium

Wir nennen einen NEA eindeutig, wenn gilt:

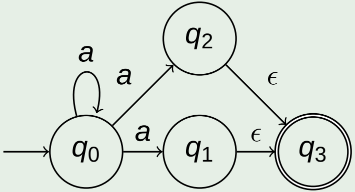
$$\text{da}(\mathcal{A}) \leq 1$$

Grad der Uneindeutigkeit

$\mathrm{da}(\mathcal{A}) = 1$



$\mathrm{da}(\mathcal{A}) = 2$



Von ϵ-NEA zu NEA

- Zu jedem NEA $\mathcal{A}$ mit ϵ-Transitionen existiert NEA $\mathcal{A}'$ ohne ϵ-Transitionen mit L($\mathcal{A}$) = L ($\mathcal{A}'$)
  - da($\mathcal{A}'$) $\leq$ da($\mathcal{A}$):

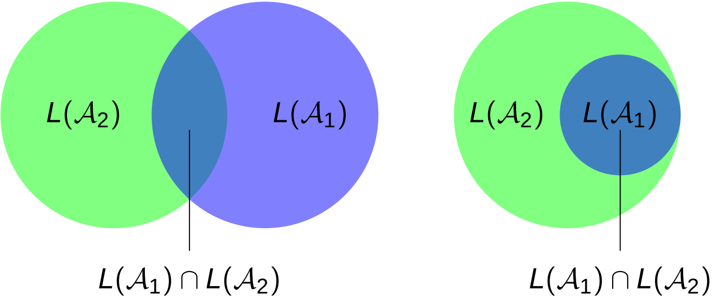
$$\pi_\epsilon = (q_0, \cdots, q_i, a, q_{i+1}, \epsilon, q_{i+2}, \cdots, q_F) \text{ ist Lauf von } \mathcal{A}$$
$$\rightarrow \pi = (q_0, \cdots, q_i, a, \qquad q_{i+2}, \cdots, q_F) \text{ ist Lauf von } \mathcal{A}'$$

- Konstruktion in polynomieller Zeit bekannt aus FoSAP

Mengentheoretisch Beziehung

Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ NEAs, dann gilt:

$$L(\mathcal{A}_1) \subseteq L(\mathcal{A}_2) \Leftrightarrow \neg(L(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) \subsetneq L(\mathcal{A}_1))$$

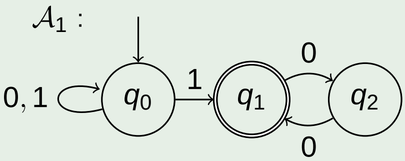


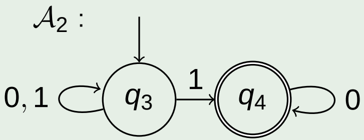
Produktautomat

- NEAs $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$
- Konstruiere NEA $\mathcal{A}_{1,2}$ mit $L(\mathcal{A}_{1,2}) = L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2)$
- Bekannt in polynomieller Zeit aus FoSAP
- $\mathrm{da}(\mathcal{A}_1), \mathrm{da}(\mathcal{A}_2) \leq 1 \Rightarrow \mathrm{da}(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) \leq 1$

Beispiel

Ursprungsautomaten

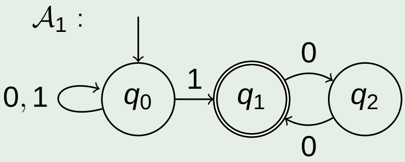


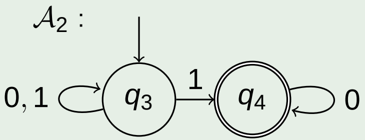


Produktautomat

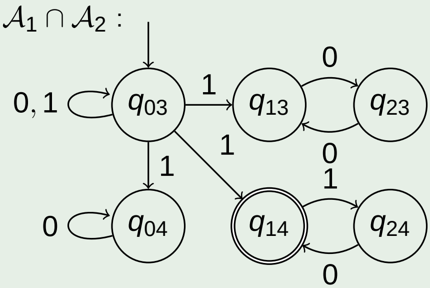
Beispiel

Ursprungsautomaten





Produktautomat



$\mathrm{AccWords}(n)$

Anzahl akzeptierter Wörter

Anzahl akzeptierender Läufe:

$$\mathrm{D}(q,k) := |\{\pi \in \text{akzeptierende Läufe von } \mathcal{A} \text{ ab } q \text{ der Länge } k\}|$$

Insbesondere bei eindeutigem NEA ohne ϵ-Tansitionen:

$$\mathrm{AccWords}(n) := \mathrm{D}(q_0, n)$$

Berechnung von AccWords(n)

Eingabe: eindeutiger NEA ohne ϵ-Transitionen
$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$, Länge $n \in \mathbb{N}$
Ausgabe: AccWords(n)

intitialize D$(Q, 0..n)$ with 0
forall $q \in F$ **do** {
    D$(q, 0) = 1$
}
for $i = 1$ to n **do** {
    forall $q \in Q$ **do** {
        forall $(q, a, q') \in \Delta$ **do** {
            D$(q, i) += $ D$(q', i-1)$
        }
    }
}
return $D(q_0, n)$

Differenzengleichungen

Mit $A : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $c_i \in \mathbb{R}$ und $c_n \neq 0$

Allgemeine Definition

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \cdot A(k+i) = 0$$

Der **Grad** von A ist n.

Beispiel

$$F(n) + F(n+1) - F(n+2) = 0$$

Differenzengleichungen

Mit $A : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $c_i \in \mathbb{R}$ und $c_n \neq 0$

Allgemeine Definition

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \cdot A(k+i) = 0$$

Der **Grad** von A ist n.

Beispiel

$$F(n) + F(n+1) - F(n+2) = 0$$

Differenzengleichungen zu Automaten

- Wir betrachten folgend nur eindeutige ϵ-freie NEAs
- Zu jedem dieser NEAs existiert eine Differenzengleichung von AccWords

Konstruktion Differenzengleichung zu $\mathcal{A}_1$

1. Aufstellen der Zustandsgleichungen

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}(q_0, k+1) &= 2 \cdot \mathrm{D}(q_0, k) + \mathrm{D}(q_1, k) \\
\mathrm{D}(q_1, k+1) &= \mathrm{D}(q_2, k) \\
\mathrm{D}(q_2, k+1) &= \mathrm{D}(q_1, k)
\end{aligned}
$$

Konstruktion Differenzengleichung zu $\mathcal{A}_1$

2. Induktives Aufstellen der Gleichungen erhöhter Wortlänge

$$\begin{aligned}
D(q_0, k+1) &= 2 \cdot D(q_0, k) + D(q_1, k) \\
D(q_0, k+2) &= 4 \cdot D(q_0, k) + 2 \cdot D(q_1, k) + D(q_2, k) \\
D(q_0, k+3) &= 8 \cdot D(q_0, k) + 5 \cdot D(q_1, k) + 2 \cdot D(q_2, k)
\end{aligned}$$

Gauß-Matrix

$D(q_0, k+i)$ $i=1$	$i=2$	$i=3$	$D(q_0, k)$	$D(q_1, k)$	$D(q_2, k)$
1			2	1	
	1		4	2	1
		1	8	5	2

Konstruktion Differenzengleichung zu $\mathcal{A}_1$

2. Induktives Aufstellen der Gleichungen erhöhter Wortlänge

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}(q_0, k+1) &= 2 \cdot \mathrm{D}(q_0, k) + \mathrm{D}(q_1, k) \\
\mathrm{D}(q_0, k+2) &= 4 \cdot \mathrm{D}(q_0, k) + 2 \cdot \mathrm{D}(q_1, k) + \mathrm{D}(q_2, k) \\
\mathrm{D}(q_0, k+3) &= 8 \cdot \mathrm{D}(q_0, k) + 5 \cdot \mathrm{D}(q_1, k) + 2 \cdot \mathrm{D}(q_2, k)
\end{aligned}$$

Gauß-Matrix

$D(q_0, k+i)$					
$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$\mathrm{D}(q_0, k)$	$\mathrm{D}(q_1, k)$	$\mathrm{D}(q_2, k)$
1			2	1	
	1		4	2	1
		1	8	5	2

Konstruktion Differenzengleichung zu $\mathcal{A}_1$

Gauß-Matrix

$D(q_0, k+i)$					
$i=1$	$i=2$	$i=3$	$\mathrm{D}(q_0, k)$	$\mathrm{D}(q_1, k)$	$\mathrm{D}(q_2, k)$
1			2	1	
	1		4	2	1
		1	8	5	2
-1	-2	1	-2	0	0

3. **Eliminierung ergibt Differenzengleichung:**

$$-\operatorname{AccWords}(k+1) - 2\operatorname{AccWords}(k+2) + \operatorname{AccWords}(k+3) = -2\operatorname{AccWords}(k)$$

Lemma

AccWords(n) erfüllt Differenzengleichung mit Grad $m \leq |Q|$

Differenzengleichungen

- A, B Differenzengleichungen des Grades a, b
- Auch $C(k) = A(k) - B(k)$ Differenzengleichung
- Dazu $a + b$ weitere Gleichungen:

$$\begin{aligned} C(k+1) &= A(k+1) - B(k+1) \\ &\vdots \\ C(k+a+b) &= A(k+a+b) - B(k+a+b) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ durch Eliminierung von A und B im LGS neue Differenzengleichung $C(k)$ mit Grad $\leq a + b$

Insbesondere gilt

$A(i) - B(i) = 0$ für $0 \leq i < a + b$
$\Rightarrow C(j) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$

Inklusionsprüfung

- $L(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) \subseteq L(\mathcal{A}_1)$
- Zu NEAs $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ für $L(\mathcal{A}_1) \subseteq L(\mathcal{A}_2)$ berechne $C(i) = \text{AccWords}_{\mathcal{A}_1}(i) - \text{AccWords}_{\mathcal{A}_{1,2}}(i)$ für $0 \leq i < |Q_1| \cdot |Q_2| + |Q_1|$
- Ein $C(i) \neq 0$
  $\Rightarrow L(\text{Produktautomat})$ ist echte Teilmenge von $L(\mathcal{A}_1)$
  $\Rightarrow L(\mathcal{A}_1)$ ist **keine** Teilmenge von $L(\mathcal{A}_2)$
- Alle $C(i) = 0$
  $\Rightarrow L(\text{Produktautomat})$ ist **keine** echte Teilmenge von $L(\mathcal{A}_1)$
  $\Rightarrow L(\mathcal{A}_1)$ ist Teilmenge von $L(\mathcal{A}_2)$

Theorem

Das Inklusionsproblem für eindeutige ϵ-NEAs ist in P.

Zusammenfassung

- Eindeutigkeit
- Inklusions-/Äquivalenzproblem für eindeutige NEAs effizient entscheidbar
  - Von ϵ-NEA zu NEA
  - Mengentheoretische Beziehung
  - Produktautomat
  - Prüfung der AccWords(i) bis zu fester Länge ($\rightarrow$ wegen Differenzengleichungen)

Theorem

Das Inklusionsproblem für eindeutige ϵ-NEAs ist in P.

Weitere Ergebnisse

- Methode durch geschickte Konstruktion auch anwendbar bei festem da$(\mathcal{A}) = k$
- Entscheidbar, ob da$(\mathcal{A}) \leq k$
- Effiziente Entscheidbarkeit, ob da$(\mathcal{A}) = \infty$